14 Fonctions cube et racine carrée.

Livre p.124.

1. Rappels sur les puissances

Définition 14.1 Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{Z}$, on a :

- Si $m > 0$: $a^m = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{m \text{ facteurs}}$
- Pour $a \neq 0$, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- Par convention, pour $a \neq 0$, on pose $a0 = 1$.

Exemple :

- $2^3 = 2 \times 2 \times 2$
- $(-3)^2 = (-3) \times (-3) = +9$
- $(2+a)^2 = (2+a) \times (2+a)$
- $x^3 = x \times x \times x = x^2 \times x$
- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Cas particulier des puissances de 10 :

- $10^3 = 1000$
- $10^5 = 100000$
- $10^{-3} = 0,001$
- $10^{-5} = 0,00001$

Exemple :

- $2,45 \times 10^3 = 2450$
- $12 \times 10^{-3} = 0,012$
- $5460 = 5,46 \times 10^3$
- $0,0023 = 2,3 \times 10^{-3}$

Propriété 14.1 Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $m, p \in \mathbb{Z}$.

- $a^m \times a^p = a^{m+p}$
- $(a^m)^p = a^{m \times p}$
- $(a \times b)^m = a^m \times b^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
- $\frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}$

Exemple :

- $2^3 \times 2^5 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_{} \times \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{} = 2^{3+5} = 2^8$

- $2^{-3} \times 2^5 = \frac{1}{2^3} \times 2^5 = \frac{2^5}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} = 2^{5-3} = 2^2$
- $x \times x^2 = x^1 \times x^2 = x^{1+2} = x^3$
- $(3x)^2 = (3 \times x)^2 = 3^2 \times x^2 = 9x^2$
- $16x^2 = 4^2 \times x^2 = (4 \times x)^2 = (4x)^2$
- $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$
- $\frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$
- $\frac{x^2}{x} = x$ (pour $x \neq 0$)

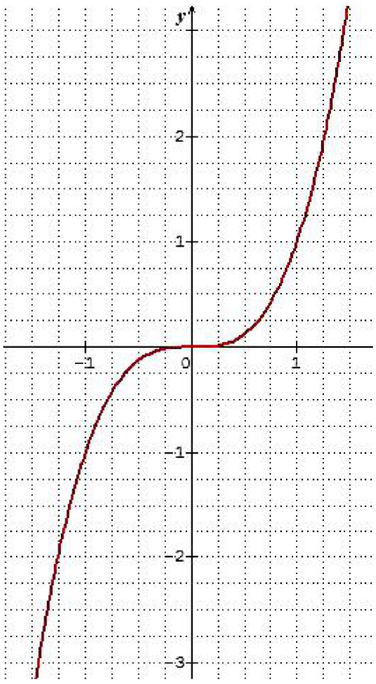
2. Fonction cube

Définition 14.2 La fonction cube est la fonction qui à tout nombre réel associe son cube , c'est-à-dire le fonction f qui à tout réel x associe $x^3 = x \times x \times x$.

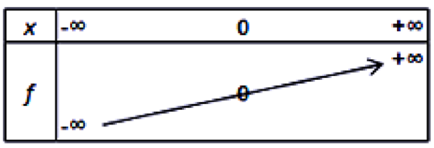
Tableau de valeurs :

x	-10	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3	10
$f(x)$	-1000	-27	-8	-1	-0,125	0	0,125	1	8	27	1000

Propriété 14.2 La fonction cube est impaire : sa courbe représentative admet l'origine du repère pour centre de symétrie.
La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:
$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b \Rightarrow a^3 < b^3$.



Démonstration Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = x^3 \end{cases}$ La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$: quel que soit un nombre réel, on peut toujours en déterminer le cube, car la multiplication est définie sur $\mathbb{R}$.
Quand on étudie une fonction, il faut commencer par se demander si elle est paire ou impaire 5.4, pour réduire le domaine d'étude :
$\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = (-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = (-1) \times x \times (-1) \times x \times (-1) \times x = \underbrace{(-1) \times (-1) \times (-1)}_{-1} \times x \times x \times x = -x^3 = -f(x)$.
Donc la fonction cube est impaire : on pourra restreindre son étude à $\mathbb{R}^+$, et compléter par symétrie (la courbe d'une fonction impaire admet une symétrie centrale par rapport à l'origine du repère).
On travaille donc sur $\mathbb{R}^+$.
Soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Supposons que $b < a$ (on ne perd pas en généralité car a et b jouent des rôles symétriques), et étudions le signe de $a^3 - b^3$.
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (à vérifier en re-développant).
Or, en tant que carrés, $a^2 \geqslant 0$ et $b^2 \geqslant 0$. De plus, comme on travaille sur $\mathbb{R}^+$, $ab \geqslant 0$.
Finalement, en tant que somme de termes positifs, $(a^2 + ab + b^2) > 0$ (ce facteur ne peut être nul puisque $b < a$, dont a et b ne sont pas tous les deux nuls.
On a supposé $b < a$, donc $(a - b) > 0$.
Finalement, $a^3 - b^3 > 0$, i.e. $f(a) > f(b) > 0$.
On a donc montré que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+, b < a \Rightarrow f(b) < f(a)$: la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
Par symétrie, elle est également strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$, et par suite la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Propriété 14.3 Positions relatives des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$ et $y = x^3$ pour $x \geqslant 0$.

- Sur $[0; 1]$, $x^3 \leqslant x^2 \leqslant x$
- Sur $[1; +\infty[$, $x \leqslant x^2 \leqslant x^3$

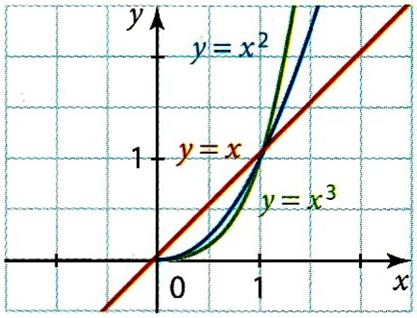
Démonstration 1. Soit $x \in [0;1]$.

- : positions relatives des fonctions carré et cube :
  $x^3 - x^2 = x^2(x-1) < 0$, donc $x^3 < x^2$.
- positions relatives de la fonction carré et de l'application identité :
  $x^2 - x = x(x-1) < 0$, donc $x^2 < x$

2. Soit $x > 1$.

- : positions relatives des fonctions carré et cube :
  $x^3 - x^2 = x^2(x-1) > 0$, donc $x^3 > x^2$.
- positions relatives de la fonction carré et de l'application identité :
  $x^2 - x = x(x-1) > 0$, donc $x^2 > x$

3. Pour $x = 0$ et pour $x = 1$, $x = x^2 = x^3$.



Remarque 14.1 L'antécédent d'un nombre a par la fonction cube est appelé racine cubique de a et noté $\sqrt[3]{a}$.
Par exemple, $\sqrt[3]{27} = 3$

3. Fonction racine carrée.

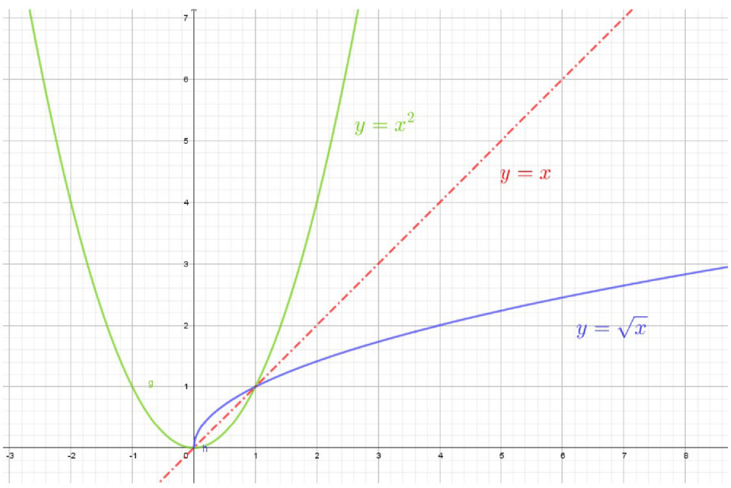
Définition 14.3 La fonction racine carrée est la fonction qui à tout nombre réel positif x associe le nombre réel positif y tel que $y^2 = x$.
On note : $\begin{cases} f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto y = \sqrt{x} \end{cases}$

Remarque 14.2 On peut considérer $\sqrt{x}$ comme étant égal à $x^{\frac{1}{2}}$. En effet, d'après les règles de calcul sur les puissances, si $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, on a bien $y^2 = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 = x^{\frac{1}{2}} \times 2 = x^1 = x$. On peut donc déduire toutes les règles de calcul sur les racines carrées des règles de calcul sur les puissances.

Tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{4}$	1	2	3	4	9	100
$f(x) = \sqrt{x}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\sqrt{2} \simeq 1,41$	$\sqrt{3} \simeq 1,73$	2	3	10

Remarque 14.3 Dans $\mathbb{R}^+$, les fonctions :
$\begin{cases} f : x \longmapsto x^2 \\ g : x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ sont "la marche arrière" l'une de l'autre. On dit qu'elles sont ***réciproques*** l'une de l'autre.
Graphiquement, les courbes représentatives de deux fonctions réciproques l'une de l'autre sont **symétriques** par rapport à la première diagonale (droite d'équation $y = x$). La réciproque d'une fonction f est, si elle existe, notée f^{-1}.
On ne prend le symétrique que de la partie de la courbe de $y = x^2$ qui est sur $\mathbb{R}^+$ car :
- La racine carrée de x est définie comme "le nombre **positif** qui au carré donne x", donc elle ne peut avoir des images que dans $\mathbb{R}^+$.
-Si on prenait le symétrique de la totalité de la courbe représentant la fonction carrée, on obtiendrai une courbe qui "revient sur elle-même", un antécédent pourrait donc avoir deux images, et ce ne serait plus une fonction.
On obtient ainsi la représentation graphique de la fonction racine carrée.



Les variations de la fonctions racine carrée se déduisent donc de celles de la fonction carré :

x	0 $\quad$ $+\infty$
f	$0 \nearrow +\infty$

Propriété 14.4 Pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a :

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Si a et b sont non nuls, $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Exemple

- $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{\frac{4}{9} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}} = \frac{2}{3}$